Областной мини-турнир юных математиков
Командная экспресс-олимпиада
Решения
Тур 1. (10 минут. Каждая задача 6 баллов)

1. Незнайка записал натуральное число, делящееся на 17, зачеркнул в нем последнюю цифру, умножил вычеркнутую цифру на 5 и вычел это из получившегося после зачеркивания числа. Знайка не видел ни первоначального числа, ни нового, но утверждает, что новое число также делится на 17. Прав ли Знайка?

Ответ: Знайка прав.

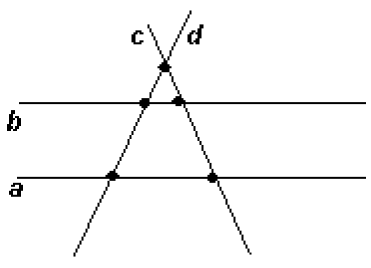
Решение. Представим число, написанное Незнайкой, в виде $10a + b$, где b – его последняя цифра. По условию это число делится на 17. После зачёркивания последней цифры получилось число a, а после всех произведённых действий – число $a - 5b$. Так как $a - 5b = 51a - 5(10a + b)$, а числа $51a$ и $10a + b$ кратны 17, то и полученное число делится на 17

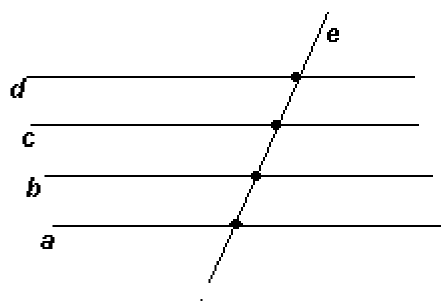
2. Когда бочка пуста на 30%, она содержит на 30 литров больше меда, чем когда она заполнена на 30%. Сколько литров меда в полной бочке?
   Ответ: 75 литров.

Решение. <u>Первый способ</u>. Если бочка пуста на 30%, значит она заполнена на 70%, то есть 30 литров составляют 40% ее объема. Следовательно, 10% объема бочки – это 7,5 л, а весь объем – это 75 л.
<u>Второй способ</u>. Пусть объём бочки – x литров. По условию задачи: $0{,}7x = 0{,}3x + 30$. Тогда $0{,}4x = 30$, то есть $x = 75$.

3. Незнайка утверждает, что он может провести на плоскости 4 прямые так, чтобы их суммарное количество точек пересечения равнялось пяти и 5 прямых так, чтобы их суммарное количество точек пересечения равнялось четырем. Прав ли он?

   Ответ: Незнайка прав.
   Существуют и другие примеры.





Областной мини-турнир юных математиков
Командная экспресс-олимпиада
Решения
Тур 2. (15 минут. Каждая задача 7 баллов)

4. В шахматном фестивале участвовало 320 человек: мастера и любители. Каждый мастер дал сеанс одновременной игры десяти любителям, при этом, каждому любителю удалось сыграть в шести сеансах. Сколько мастеров участвовало в этом фестивале?

   Ответ: 120.

Решение. Пусть на фестивале было x мастеров и $320 – x$ любителей. Подсчитаем общее количество партий, сыгранных между мастерами и любителями. С одной стороны, каждый мастер сыграл 10 партий, значит, это количество равно $10x$. С другой стороны, оно равно $6(320 – x)$, так как каждый любитель сыграл с 6 мастерами.

Таким образом, $10x = 6(320 – x)$, откуда $x = 120$.

5. Существуют ли 11 последовательных натуральных чисел, сумма которых равна кубу некоторого натурального числа?

   Ответ: существуют.

Решение. Рассмотрим сумму одиннадцати последовательных натуральных чисел:

$$(n – 5) + (n – 4) + ... + n + ... + (n + 4) + (n + 5) = 11n.$$

Тогда условию задачи заведомо удовлетворяют все суммы вида 11^{3k}, где k – натуральное число, то есть $n = 11^{3k-1}$. Существуют и другие примеры

6. Велосипедист проехал из пункта А в пункт В, где пробыл 30 минут, и вернулся в А. По пути в В он обогнал пешехода, а через 2 часа встретился с ним на обратном пути. Пешеход прибыл в В одновременно с тем, когда велосипедист вернулся в А. Сколько времени потребовалось пешеходу на путь из А в В, если его скорость в четыре раза меньше скорости велосипедиста?

   Ответ: 10 часов.

Решение. Расстояние, которое пешеход проходит за 2 часа, примем за единицу. Тогда велосипедист проезжает это же расстояние за 30 минут. С момента первой встречи пешеход прошел одну единицу, а велосипедист проехал три единицы (полчаса он отдыхал в пункте В). Значит, расстояние от точки их второй встречи до пункта В равно одной единице. Тогда после второй встречи пешеход пройдет еще одну единицу, а велосипедист за это время проедет 4 единицы. Поэтому расстояние между А и В равно 5 единицам, следовательно, пешеходу на путь из А в В потребовалось 10 часов.

Областной мини-турнир юных математиков
Командная экспресс-олимпиада
Решения
Тур 3. (20 минут. Каждая задача 8 баллов)

7. В строчку записано 100 чисел. Каждое число, начиная со второго, не меньше предыдущего; сумма всех чисел равна 10; сумма любых 30 чисел не меньше, чем 2. Какое наименьшее число может стоять на 96-м месте?

   Ответ: $\frac{1}{15}$.

Решение. Оценка. Рассмотрим первые 30 записанных чисел. Так как их сумма не меньше 2, то тридцатое число не меньше, чем их среднее арифметическое, то есть не меньше, чем $2 : 30 = \frac{1}{15}$. Искомое число не меньше тридцатого, значит, оно также не меньше, чем $\frac{1}{15}$.

Пример. Указанное значение достигается, если каждое из первых девяносто девяти чисел равно $\frac{1}{15}$, а последнее равно $10 - 99\cdot.\frac{1}{15} = 3{,}4$.

Условия задачи выполняются, так как сумма всех чисел равна 10; сумма любых 30 чисел не меньше, чем 2, а каждое число, начиная со второго, не меньше предыдущего
Существуют и другие примеры.

8. Есть 2018 гирек массами 1 г, 2 г, …, 2018 г. Заяц положил на одну чашу весов две гирьки. Волк хотел двумя другими гирьками на другой чаше их уравновесить, но не смог. Какие гирьки мог взять Заяц? *Перечислите все варианты и обоснуйте*.

   Ответ: (1 г; 2 г); (1 г; 3 г); (2016 г; 2018 г); (2017 г; 2018 г).

Решение. 1) Объясним, почему Волк не сумеет уравновесить указанные наборы. В парах гирь (1 г; 2 г) и (1 г; 3 г) сумма масс меньше, чем сумма масс любых двух гирь оставшегося набора, а в парах (2016 г; 2018 г) и (2017 г; 2018 г), наоборот, сумма масс гирь больше, чем сумма масс любых двух гирь из оставшегося набора.
2) Покажем, как Волк сможет уравновесить любую другую пару гирь. Пусть Заяц выбрал гири массами m и n, причем $n > m$. Тогда, если $n - m > 2$, то их уравновесят гири с массами $m + 1$ и $n - 1$ (такие гири обязательно найдутся в оставшемся наборе). Если же $n - m = 1$ или $n - m = 2$, то их уравновесят гири с массами $m - 1$ и $n + 1$. Такие гири найдутся в оставшемся наборе, если $m \neq 1$ и $n \neq 2018$, а именно эти случаи и указаны в ответе.

9. Взяли две одинаковые колоды из 36 карт, каждую перетасовали и положили одну колоду на другую. Затем подсчитали количество карт, лежащих между каждой парой одинаковых карт: между дамами пик, между тузами червей, и так далее. Чему равна сумма всех 36 найденных чисел?

   Ответ: 1260.

Решение. Первый способ. Рассмотрим самую нижнюю карту нижней колоды и такую же карту верхней колоды, пусть, например, это короли треф. Предположим, что в верхней колоде король треф лежит на семерке бубен. Заметим, что если мы в верхней колоде поменяем местами короля треф и семерку бубен, то количество карт, лежащих между королями треф, на одну уменьшится, а количество карт, лежащих между семерками бубен, на одну увеличится. Значит, искомая сумма от такой перестановки не изменится.

Рассуждая аналогично, можно постепенно менять местами короля треф из верхней колоды с картами, на которых он лежит, до тех пор, пока король треф не станет самой нижней картой в верхней колоде. Далее рассмотрим вторую снизу карту нижней колоды и повторим описанную процедуру с такой же картой из верхней колоды, и так далее.

Следовательно, постепенно меняя местами соседние карты верхней колоды, можно, не изменяя искомой суммы, расположить карты верхней колоды в том же порядке, что и в нижней. Тогда между любыми двумя одинаковыми картами будет лежать ровно 35 карт, поэтому искомая сумма равна $35\cdot36 = 1260$.

Второй способ. Пронумеруем числами от 1 до 36 карты верхней колоды сверху вниз и карты нижней колоды также сверху вниз. Пусть для карты номер 1 верхней колоды соответствующая ей карта нижней колоды имеет номер k_1. Тогда между ними находится $(36 - 1)$ карт верхней колоды и $(k_1 - 1)$ карт нижней колоды, то есть $(36 + k_1 - 2)$ карт. В общем виде: если для карты с номером i верхней колоды соответствующая карта нижней имеет номер k_i, то между ними $(i - 1)$ карта верхней колоды и $(k_i - 1)$ карт нижней колоды, то есть $(i + k_i - 2)$ карт.

Таким образом, искомая сумма $S = (36 + k_1 - 2) + (35 + k_2 - 2) + (34 + k_3 - 2) + \ldots + (i + k_i - 2) + \ldots + (1 + k - 2) = (36 + 35 + 34 + \ldots + 1) + (k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_{36}) - 2\cdot36$. Заметим, что $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_{36} = 36 + 35 + 34 + \ldots + 1 = (36 + 1)\cdot18$, так как $(k_1; k_2; k_3;\ldots;k_{36})$ – это некоторая перестановка чисел 1, 2, 3, … , 36. Значит, $S = 2\cdot37\cdot18 - 2\cdot36 = 1260$.